Задача 1.

Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такова, что для любого квадрата $ABCD$ на плоскости $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$. Следует ли из этого, что $f(P) = 0$ для любой точки P на плоскости?

Критерии оценивания:

Рассмотрена конструкция из нескольких квадратов, но без дальнейшего развития — 1 б.

Доказательство того, что $f(A) + f(B) = 0$, где A и B - две вершины противоположных углов квадрата AA_1BB_1 - 5 б.

Полное решение — 10 б.

За небольшую арифметическую ошибку снимается 1 б.

За небольшую логическую ошибку снимается 2 б.

Решения, основанные на предположении, что f - непрерывная функция и использование пределов — 0 б.

Задача 2.

Пусть дан тетраэдр с попарно скрещивающимися ребрами длины a и d, b и e, c и f соответственно. Доказать, что объем V такого тетраэдра выражается формулой:

$$144V^2 = a^2d^2(b^2+e^2+c^2+f^2-a^2-d^2)+b^2e^2(a^2+d^2+c^2+f^2-b^2-e^2)+$$
$$+c^2f^2(a^2+d^2+b^2+e^2-c^2-f^2)-(bcd)^2-(ace)^2-(abf)^2-(def)^2.$$

Критерии оценивания:

Использована формула объема тетраэдра, выраженная через смешанное произведение — 2 б.

Квадрат объема тетраэдра выражен через определитель Грама — 5 б.

Получен определитель матрицы, содержащий квадраты длин сторон (использована теорема косинусов или выписан определитель Кэли-Менгера) — 8 б.

Раскрыт и упрощен определитель, доказано требуемое в условии равенство — 10 б.

Задача 3.

Пусть $f\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ — строго положительная неубывающая функция. Обязательно ли сходится интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{|(f(x+1))^2 - f(x)f(x+2)|}{f(x)f(x+1)f(x+2)}dx\,?$$

Критерии оценивания:

Приведены потенциально полезные справедливые оценки-неравенства — 1 б.

Есть одна из оценок по авторскому решению задачи — 2 б.

Приведены три и более оценки, при этом есть ошибки и/или переходы не обоснованы — 4 б.

Оценка с неравенством полностью точная, но нет продвижения дальше — 5 б.

Не хватает точности обоснования сходимости интеграла/ряда, допущены ошибки в переходах между неравенствами — 6 б.

Не хватает точности обоснования сходимости интеграла/ряда, допущены технические ошибки — 7 б.

Не хватает точности обоснования сходимости интеграла/ряда — 8 б.

Полное точное решение — 10 б.

Задача 4.

Рассматривается уравнение

$$\frac{d}{dt}X = X^2,$$

где $X(t)$ — матрица $n \times n$, удовлетворяющая условию $\det X = 0$. Известно, что не существует непродолжаемых решений этого уравнения, заданных на ограниченном интервале, но существуют непродолжаемые решения, заданные на неограниченных интервалах типа $(t_*; +\infty)$ и $(-\infty; t_*)$. Найти n.

Критерии оценивания:

Разобран случай $n = 1$ — 1 б.

Разобран случай $n = 1$ и совершены некоторые дальнейшие шаги для других n — 2 б.

Разобран случай $n = 1$ и совершены некоторые дальнейшие шаги с неполным обоснованием, не приводящие к верному ответу, но показывающие понимание направления решения — 3 б.

Рассмотрены случаи $n = 1$ и $n \geq 3$ с верным обоснованием — 4 б.

Рассмотрены случаи $n = 1$ и $n \geq 3$ с верным обоснованием и для $n = 2$ рассмотрен частный случай - 6 б.

Рассмотрены случаи $n = 1$ и $n \geq 3$ с верным обоснованием. Для случая $n = 2$ приведено обоснование, содержащее ошибки — 7 б.

Рассмотрены случаи $n = 1$ и $n \geq 3$ с верным обоснованием. Для случая $n = 2$ приведено нестрогое/невнятное обоснование — 8 б.

Приведено верное решение — 10 б.

Задача 5.

Заданы множества $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$:

$$\mathcal{R}_1 = \{a + b \cdot i \mid \, a \in \mathbb{Z}, \, b \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathcal{R}_2 = \left\{a + b \cdot \sqrt{3} \cdot i \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, \, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Для множеств $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ проверить, существуют ли функции $f_i : \mathcal{R}_i \to \mathbb{N} \cup \{0\}, \ i = 1, 2$, обладающие следующими свойствами:

1) для $z \in \mathcal{R}_i$ выполнено $f_i(z) = 0 \ \Leftrightarrow \ Re\, z = Im\, z = 0$;

2) для произвольных ненулевых u, $v \in \mathcal{R}_i$ имеем либо $u = w \cdot v$ для некоторого ненулевого $w \in \mathcal{R}_i$, либо $0 < f_i(a \cdot u - b \cdot v) < f_i(v)$ для некоторых a, $b \in \mathcal{R}_i$.

Критерии оценивания:

Баллы, полученные за перечисленные ниже пункты 1–3, складываются.

1. Решение задачи для $\mathcal{R}_1$ — 3 б.

   Если для $\mathcal{R}_1$ приведена подходящая функция f_1 без доказательства свойства ″2)″ — 1 б.

2. Доказательство того, что из существования f_2 следует, что $\mathcal{R}_2$ является областью главных идеалов (или факториальным кольцом) — 3 б.

3. Доказательство того, что $\mathcal{R}_2$ не является областью главных идеалов (или факториальным кольцом) — 4 б.

Задача 6.

Будем говорить, что число $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ является L–числом, если для произвольного $n \in \mathbb{N}$ существуют целое число $k \in \mathbb{Z}$ и натуральное число $m \in \mathbb{N}$, большее 1, такие, что

$$\left| x - \frac{k}{m} \right| \leqslant \frac{1}{m^n}\,.$$

a) Привести пример L–числа.

b) Доказать, что множество $\mathcal{L}$ всех L–чисел имеет континуальную мощность.

c) Доказать, что для произвольного числа $\varepsilon \in (0;\, +\infty)$ найдутся такие счётные наборы чисел $(a_n(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N})$ и $(b_n(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N})$, что

1. для произвольного числа $n \in \mathbb{N}$ верно $a_n(\varepsilon) < b_n(\varepsilon)$,
2. ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_n(\varepsilon) - a_n(\varepsilon))$ сходится, причём $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_n(\varepsilon) - a_n(\varepsilon)) < \varepsilon$,
3. $$\mathcal{L} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} (a_n(\varepsilon);\; b_n(\varepsilon))\,.$$

Критерии оценивания:

Баллы, полученные за перечисленные ниже пункты 1-3, складываются.

1. Пункт $''a)''$ - 2 б.

   Если не обосновано то, что приведенное число не является рациональным, то снимается 1 б.

2. Пункт $''b)''$ - 3 б.

3. Пункт $''c)''$ - 5 б.

   Если в пункте $''c)''$ приведено только сведение к покрытию $L-$чисел на отрезке, то за этот пункт - 1 б.