Задача 1.

Для фиксированного нечётного натурального числа $n \geq 3$ найти все функции $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для любых $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяющие уравнению

$$f_n(x+y) = f_n^n(x) + \sqrt[n]{f_n(y)}.$$

Критерии оценивания:

Баллы за логические блоки суммируются. Решение считается полным (10 баллов), если выполнены все логические блоки и получен верный ответ. Вычеты за типичные ошибки применяются к набранным баллам после суммирования.

1. Указание правильного ответа без доказательства или при неверном доказательстве. **(1 балл)**
2. **Логические блоки доказательства:**
   (a) Полное доказательство того, что $f_n(0) = 0$. **(3 балла)**
   (b) Доказательство того, что $E(f_n) = \{-1; 0; 1\}$. **(3 балла)**
   (c) Доказательство того, что ни в одной точке $f(x_0) \neq \pm 1$ (переход к противоречию). **(3 балла)**
3. В альтернативных решениях без использования факта $f_n(0) = 0$ за полное доказательство того, что $f_n(x) \equiv const$. **(6 баллов)**

Типичные ошибки:

- Использование четности (нечетности) функции f: **-2 балла**
- Потеря числа -1 в $E(f_n)$ (возведение отрицательных частей в квадрат): **-2 балла**
- Решение через тот факт, что $f_n(x) \equiv -1$; 1 и 0: **-3 балла** (не засчитывается блок 2)
- Использование дифференцируемости функции: **-3 балла**

Задача 2.

Пусть A — вещественная матрица размера $n \times n$. Определим её поворот на 90° против часовой стрелки как A^r. Пример применения операции:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^r = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Пусть $A^r + B^r = B^r A^T$ (где A^T — транспонированная матрица A). Докажите, что $AB = BA$.

Критерии оценивания:

Баллы пунктов 1–5 не суммируются. Неточности в доказательстве пунктов 6 и 7 отнимают баллы от итогового результата соразмерно количеству неточностей. Ошибки в доказательстве (в частности, его неполнота) пунктов 2 и 3 аннулируют баллы за соответствующие пункты.

1. Приведено свойство операции поворота $(A+B)^r = A^r + B^r$. **(1 балл)**
2. Доказана коммутативность матриц в случае $n = 2$. **(2 балла)**
3. Доказана коммутативность матриц в случае $n = 3$. **(3 балла)**
4. Приведено представление операции поворота в виде $A^r = SA^T$, где $S_{ij} = \delta_{n+1-i,j}$. **(5 баллов)**
5. Приведено утверждение $(AB)^r = B^r A^T$. **(6 баллов)**
6. Используя утверждения пунктов 4 или 5, установлено равенство $A + B = AB$. **(+1 балл)**
7. Из корректно доказанного свойства $A + B = AB$ установлена коммутативность матриц. Задача решена полностью. **(+4 балла)**

Задача 3.

Даны 4 сферы, попарно пересекающиеся, но не касающиеся. При этом никакие три сферы не пересекаются по одной окружности. Через линии пересечения каждых двух сфер проведены плоскости (всего 6 плоскостей). Докажите, что либо все 6 плоскостей пересекаются в одной точке, либо все 6 параллельны некоторой фиксированной прямой.

Критерии оценивания:

1. Любой пример или доказано пересечение плоскостей, перпендикулярных ребрам трехгранного угла в одной точке. **(1 балл)**
2. Рассмотрен только случай четырех центров в одной плоскости, или трех, но не доказано пересечение по одной прямой, или упущен случай параллельности плоскостей для трёх сфер. **(2 балла)**
3. Доказано утверждение из пункта 2. То есть рассмотрены все случаи и все строго обосновано. **(3 балла)**
4. Верный ход решения, но 2-3 мелких утверждений без доказательства или в аналитическом решении неправильно разобран случай $\det A = 0$. **(7 баллов)**
5. Верный ход решения, но 1 мелкое утверждение без доказательства или упущен случай 4 центра в одной плоскости. **(8 баллов)**
6. Мелкий недочет в доказательстве. **(9 баллов)**
7. Полностью верное решение. **(10 баллов)**

Задача 4.

Дано натуральное число n. Какое наибольшее количество матриц $n \times n$ с целыми коэффициентами можно выбрать так, чтобы для любого непустого поднабора этих матриц определитель их суммы был нечётным?

Критерии оценивания:

Упущение ключевых деталей доказательств или недостаточно строгое обоснование решения отнимает баллы от итогового результата соразмерно количеству неточностей.

1. Верно рассмотрен случай $n = 1$ и приведён пример, а также приведён пример с двумя матрицами для $n = 2$, но без доказательства того, что 3 матрицы взять нельзя. **(1 балл)**
2. Доказано неравенство на число n: “количество матриц” $\leq$ “размер матрицы”. **(3 балла)**
3. Полностью верное решение. **(10 баллов)**

Задача 5.

Пусть $y(x)$ и $z(x)$ — заданные в левой полуокрестности нуля и стремящиеся при $x \to -0$ к $+\infty$ решения соответственно уравнений

$$y^{(20)}(x) = y^{25}(x) \quad \text{и} \quad z^{20}(x) = z^{(25)}(x).$$

1. Вычислите значение предела
$$\lim_{x \to -0} \frac{\ln y(x)}{\ln z(x)}$$
для некоторых частных решений.

2. Найдите все возможные значения этого предела.

Критерии оценивания:

Баллы подпунктов (а) и (б) суммируются. Общий балл за задачу — сумма баллов первого и второго пунктов.

1. **Первый пункт**:
   (a) Приведены частные решения без основания и посчитан предел отношения логарифмов. **(+2 балла)**
   (b) Частные решения обоснованны. **(+1 балл)**

2. **Второй пункт**:
   (a) Показано, что все производные решений стремятся к бесконечности при $x \to -0$. **(+3 балла)**
   (b) Решение доведено до конца. **(+4 балла)**

Задача 6.

Пусть дана непрерывная функция $f : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$. Для произвольных $a, b > 0$ определим координаты центра масс прямоугольника $(0, a) \times (0, b)$ с плотностью $f(x, y)$:

$$g_x(a,b) = \frac{\int_0^a \int_0^b x f(x,y)\,dy\,dx}{\int_0^a \int_0^b f(x,y)\,dy\,dx}, \quad g_y(a,b) = \frac{\int_0^a \int_0^b y f(x,y)\,dy\,dx}{\int_0^a \int_0^b f(x,y)\,dy\,dx}.$$

Пусть $p > 0, q > 0$ — некоторые фиксированные константы.

1. Найдите функцию $f(x, y)$ в случае, когда
$$g_x(a,b) = \frac{a}{p+1}, \quad g_y(a,b) = \frac{b}{q+1}.$$

2. Пусть для непрерывных положительных функций $h(b)$ и $k(a)$ координаты центра масс имеют вид:
$$g_x(a,b) = \frac{a}{p+1} \cdot h(b), \quad g_y(a,b) = \frac{b}{q+1} \cdot k(a).$$
Найдите необходимые и достаточные условия на $h(b)$ и $k(a)$, при которых существует такая непрерывная положительная функция $f(x, y)$, и укажите её.

Критерии оценивания:

1. Рассмотрение совсем частных случаев ($f(x, y) = 1$). **(1 балл)**
2. Указанное решение в первой части (оценивается в зависимости от аккуратности решения и обоснованности). **(2–3 балла)**
3. Поиск $f(x, y)$ в виде произведения функции от x и y и аккуратное выведение решений. **(3 балла)**
4. Выведение частного решения первого пункта с помощью дифференциальных уравнений. **(4 балла)**
5. Решение второго пункта, не доведенное до конца, в зависимости от степени продвижения. **(5–7 баллов)**
6. Полное решение. **(10 баллов)**