# Решения задач индивидуального тура RUDN Math Olymp 2023.

## Задача 1.

Пусть $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ симметрические матрицы такие, что

$$(AB + BA - A^2 - I_n)^2 = AB^2 - B^2A.$$

Найти $rank(A^2 + B^2)$.

*Задачу предложили Pirmyrat Gurbanov и Murat Chashemov из IUHD.*

**Критерии к оцениванию:**

Указано и обосновано, что $AB^2 = B^2A$ - 2 б.

Если из того, что $AB^2 = B^2A$ или иным путем доказано, что $AB + BA = A^2 + I_n$ - 4 б.

*Следующие баллы начисляются прибавлением:*

Доказано существование $\vec{x} \neq \vec{0} : A\vec{x} = B\vec{x} = \vec{0}$ или доказано, что $\ker(A) \cap \ker(B) \neq \{\vec{0}\}$ +3 б.

Доказано, что предположение $\det(A^2 + B^2) = 0$ ведет к противоречию +3 б.

Указано, что $A$ и $B$ - симметрические, следовательно диагонализуемы +1 б. (бонус, то есть добавляется, если количество баллов меньше 10).

**Задача 2.**

На плоскости без системы координат задана гипербола. Как, используя только циркуль (имеющий бесконечный раствор и сохраняющий его) и линейку (без делений и с одной стороной бесконечной длины), построить центр симметрии гиперболы (то есть точку, удовлетворяющую условию: для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно данной также принадлежит этой фигуре)? Описать алгоритм построения и обосновать его.

*Задачу предложил Владимир Краснов из РУДН.*

**Критерии к оцениванию:**

Верное решение с полным обоснованием - 10 б.

Верно указана прямая, проходящая через центр симметрии. При этом обоснования нет - 3 б.

Найдены две точки прямой, проходящей через центр симметрии - 2 б.

Использовано несколько параллельных хорд - 1 б.

**Задача 3.**

Найти 2023-ю производную арктангенса:

$$\frac{d^{2023}}{dx^{2023}}\arctan(x).$$

*Задачу предложил Леонид Россовский из РУДН.*

**Критерии к оцениванию:**

Приведено полное решение - 10 б.

Записано итоговое выражение $(\arctan(x))^{(n)}$ в действительной форме - 9 б.

Запись выражений $x \pm i$ в тригонометрической форме - 7 б.

Записано итоговое выражение $(\arctan(x))^{(n)}$ в комплексной форме - 5 б.

Найдены производные порядка $n$ каждой дроби $\frac{1}{x \pm i}$ - 3 б.

В работе записано представление $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i})$ - 2 б.

Верная производная $\arctan(x)$ - 1 б.

**Задача 4.**

На промежутке $[1, +\infty)$ рассматривается уравнение:

$$y' - y^2 + \frac{3my}{x} - \frac{2m^2}{x^2} = 0.$$

а) Найти общее решение этого уравнения при $m = 1$.

б) Выяснить существует ли при $m = 1$ решение этого уравнения, определенное во всех точках промежутка $[1, +\infty)$.

в) Указать множество всех значений параметра $m$, при которых у уравнения существует хотя бы одно решение, определенное во всех точках промежутка $[1, +\infty)$?

*Задачу предложила Ирина Асташова из МГУ.*

**Критерии к оцениванию:**

На все 3 вопроса даны обоснованные ответы - 10 б.

Есть мелкие погрешности - 9 б.

Решены а),б), а в в) рассмотрен частный случай, или неверно решено квадратное неравенство, полученное из условия неотрицательности дискриминанта - 8 б.

Пункты а), б) решены верно, сделаны шаги в решении в) без правильного завершения решения или частичное решение а), б), в) - 7 б.

Решены а) и б) - 6 б.

Решено задание а), есть верный шаг в решении б) или в) - 5 б.

Найдено решение а), или арифметические ошибки в решении а) и в) - 4 б.

Решение а) с арифметической ошибкой - 3 б.

Записано решение уравнения в квадратурах без вычисления интеграла или сделаны правильные замены в а) и в) без дальнейшего решения - 2 б.

Сделана верная замена переменных в а) - 1 б.

**Задача 5.**

Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является трижды непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}$, причём для произвольного $x \in \mathbb{R}$ имеем:

$$f(x) < 0; \quad f'(x) > 0; \quad f''(x) < 0; \quad f'''(x) > 0,$$

а кроме того:

$$27 \cdot f'''(x) + f(x) \leqslant 0.$$

а) Доказать, что для произвольного $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$3 \cdot f'(x) + 2 \cdot f(x) < 0.$$

б) Привести пример функции $f$, удовлетворяющей всем перечисленным условиям.

*Задачу предложил Алексей Беляев из РУДН.*

**Критерии к оцениванию:**

Предоставлено полное решение пунктов а) и б) - 10 б.

Доказано из предположения, что аналогичные условия верны и для 4 производной - 4 б.

Приведен верный пример в пункте б) - 2 б.

Приведен неверный пример в пункте б) - 0 б.

Решено для функции частного вида (например: для многочленов, для линейных комбинаций экспонент ...) - 0 б.

Утверждение доказано, исходя из неверно построенного отрицания (например, что $2f(x) + 3f'(x) \geq 0$ при любом x) - 0 б.

Переформулировка в новых терминах (например: использование логарифмической производной, замена $g(x) = f(3x)$ ) - само по себе не добавляет баллов.