RUDN university

RUDNMATH OLYMP

МЕЖДУНАРОДНАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Индивидуальный тур

Решения ▪ 2025

РЕШАЙ ▪ ПОБЕЖДАЙ ▪ ПОКОРЯЙ МИР!

Содержание

1 **Задача 1** — Функциональные уравнения — 3

2 **Задача 2** — Линейная алгебра — 5

3 **Задача 3** — Геометрия — 7

4 **Задача 4** — Матрицы над конечными полями — 9

5 **Задача 5** — Дифференциальные уравнения и асимптотика — 11

6 **Задача 6** — Кратные интегралы — 14

В брошюре собраны полные решения шести задач индивидуального тура **RUDNMATH OLYMP 2025** — международной студенческой математической олимпиады РУДН. Условие каждой задачи выделено цветной рамкой, после неё следует подробное решение.

ЗАДАЧА 1 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для фиксированного нечётного натурального числа $n \geq 3$ найти все функции $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для любых $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяющие уравнению

$$f_n(x+y) = f_n^n(x) + \sqrt[n]{f_n(y)}.$$

РЕШЕНИЕ

Значение в нуле. Положим $x = y = 0$:

$$f_n(0) = f_n^n(0) + \sqrt[n]{f_n(0)}.$$

Обозначим $t = f_n(0)$. Тогда $t = t^n + \sqrt[n]{t}$.

В силу нечётности n замена $t \mapsto -t$ сохраняет это уравнение, поэтому достаточно рассмотреть $t \geq 0$. Если $t > 1$, то $t^n > t$, и правая часть больше t. Если $0 < t < 1$, то $\sqrt[n]{t} > t$, и правая часть снова больше t. При $t = 1$ правая часть равна $2 \neq 1$.

Следовательно, единственная возможность — $t = 0$, то есть $f_n(0) = 0$.

Возможные значения. Положим $y = 0$:

$$f_n(x) = f_n^n(x) + \sqrt[n]{f_n(0)} = f_n^n(x).$$

Поскольку n нечётно, равенство $f_n(x) = f_n^n(x)$ означает, что **при каждом x значение $f_n(x)$ равно -1, 0 или 1.**

Ненулевые значения невозможны. Пусть $f_n(x) = 1$ для некоторого $x \neq 0$. Положив $y = x$, получим

$$f_n(2x) = f_n^n(x) + \sqrt[n]{f_n(x)} = 1 + 1 = 2,$$

что невозможно, так как $f_n(2x) \in \{-1, 0, 1\}$. Аналогично, если $f_n(x) = -1$, то

$$f_n(2x) = (-1)^n + (-1) = -2,$$

что также невозможно.

Итак, $f_n(x) = 0$ при всех $x \neq 0$, а с учётом $f_n(0) = 0$ получаем единственное решение $f_n \equiv 0$. Проверка очевидна.

ОТВЕТ

$f_n(x) \equiv 0$.

ЗАДАЧА 2 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Пусть A — вещественная матрица размера $n \times n$. Определим её поворот на 90° против часовой стрелки как A^r. Пример применения операции:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^r = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Пусть $A^r + B^r = B^r A^T$ (где A^T — транспонированная матрица A). Докажите, что $AB = BA$.

РЕШЕНИЕ

Поворот через транспонирование. Пусть $S = I^r$, где I — единичная матрица (S — матрица с единицами на побочной диагонали, $S^2 = I$). Непосредственно проверяется, что для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$A^r = SA^T.$$

Упрощение условия. Подставим это в условие задачи:

$$SA^T + SB^T = SB^T A^T = S(AB)^T.$$

Умножая слева на S^{-1} и транспонируя, получаем $A + B = AB$.

Взаимно обратные матрицы. Перепишем полученное равенство так:

$$(I - A)(I - B) = I - A - B + AB = I.$$

Значит, **матрицы $I - A$ и $I - B$ взаимно обратны**, и поэтому их можно перемножить и в обратном порядке:

$$(I - B)(I - A) = I.$$

Раскрывая скобки, получаем $I - A - B + BA = I$, откуда

$$BA = A + B = AB.$$

ЗАДАЧА 3 ГЕОМЕТРИЯ

Даны 4 сферы, попарно пересекающиеся, но не касающиеся. При этом никакие три сферы не пересекаются по одной окружности. Через линии пересечения каждых двух сфер проведены плоскости (всего 6 плоскостей). Докажите, что либо все 6 плоскостей пересекаются в одной точке, либо все 6 параллельны некоторой фиксированной прямой.

РЕШЕНИЕ

Пусть S_i — сфера с центром O_i и радиусом R_i.

Степень точки. Назовём *степенью точки* X относительно сферы S с центром O и радиусом R число $\mathrm{pow}_S(X) = XO^2 - R^2$. Для любой секущей, проходящей через X и пересекающей сферу в точках A и B, верно $\mathrm{pow}_S(X) = XA \cdot XB$ (с учётом знака, если точка внутри сферы). Это следует из подобия треугольников XAC и XBD, где CD — секущая, проходящая через X и O.

Радикальная плоскость. Назовём *радикальной плоскостью* двух сфер S_1 и S_2 множество точек, степени которых относительно S_1 и S_2 равны. Докажем, что **если сферы пересекаются, то это множество — плоскость $\alpha_{1,2}$, содержащая их окружность пересечения**.

Все точки окружности пересечения удовлетворяют условию: их степени относительно обеих сфер равны нулю. Обратно, пусть $\mathrm{pow}_{S_1}(X) = \mathrm{pow}_{S_2}(X)$, и пусть X' — проекция X на прямую O_1O_2. По теореме Пифагора $XO_i^2 = X'O_i^2 + XX'^2$, поэтому

$$\mathrm{pow}_{S_1}(X') = \mathrm{pow}_{S_1}(X) - XX'^2,$$
$$\mathrm{pow}_{S_2}(X') = \mathrm{pow}_{S_2}(X) - XX'^2.$$

Следовательно, $\text{pow}_{S_1}(X') = \text{pow}_{S_2}(X')$, то есть X' — точка прямой O_1O_2 с равными степенями. Такая точка на O_1O_2 единственна и лежит в $\alpha_{1,2}$. Поскольку $XX' \perp O_1O_2$, точка X лежит в плоскости, перпендикулярной O_1O_2 и проходящей через X', то есть в $\alpha_{1,2}$.

Важно, что **радикальная плоскость $\alpha_{i,j}$ перпендикулярна линии центров O_iO_j**.

Центры в одной плоскости. Если центры всех четырёх сфер лежат в одной плоскости, то все шесть радикальных плоскостей перпендикулярны ей, а значит, **параллельны её нормали** — это и есть фиксированная прямая из условия. Далее считаем, что центры не компланарны.

Общий случай. Рассмотрим $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,4}$. Точки O_1, O_2, O_3 не коллинеарны, поэтому $\alpha_{1,2}$ и $\alpha_{2,3}$ не параллельны и пересекаются по прямой l, перпендикулярной плоскости $O_1O_2O_3$.

Если бы $l \parallel \alpha_{3,4}$, то плоскость $\alpha_{3,4}$ тоже была бы перпендикулярна плоскости $O_1O_2O_3$. Но $\alpha_{3,4} \perp O_3O_4$, и тогда O_4 лежала бы в плоскости $O_1O_2O_3$ — противоречие.

Значит, l и $\alpha_{3,4}$ пересекаются в некоторой точке T. Так как T лежит на трёх радикальных плоскостях,

$$\text{pow}_{S_1}(T) = \text{pow}_{S_2}(T) = \text{pow}_{S_3}(T) = \text{pow}_{S_4}(T).$$

Поэтому T лежит и на плоскостях $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$, то есть **все шесть плоскостей проходят через точку T**.

ЗАДАЧА 4 МАТРИЦЫ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Дано натуральное число n. Какое наибольшее количество матриц $n \times n$ с целыми коэффициентами можно выбрать так, чтобы для любого непустого поднабора этих матриц определитель их суммы был нечётным?

РЕШЕНИЕ

Определитель целочисленной матрицы нечётен тогда и только тогда, когда матрица обратима по модулю 2, то есть над полем $\mathbb{F}_2$. Поэтому перейдём к вычетам по модулю 2: требуется найти наибольшее число матриц в $M_n(\mathbb{F}_2)$, у которых **сумма любого непустого поднабора обратима**.

Оценка: не больше n матриц. Пусть матрицы $A_1, \dots, A_k$ удовлетворяют условию, и $v_1, \dots, v_k$ — их первые столбцы (векторы из $\mathbb{F}_2^n$). Если $k > n$, то эти векторы линейно зависимы: найдутся $c_1, \dots, c_k \in \{0, 1\}$, не все равные нулю, такие что

$$c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0.$$

Для непустого множества $I = \{i \mid c_i = 1\}$ сумма $\sum_{i \in I} A_i$ имеет нулевой первый столбец, и её определитель равен нулю. Противоречие, поэтому $k \le n$.

Пример из n матриц. Рассмотрим поле $\mathbb{F}_{2^n}$ как n-мерное векторное пространство над $\mathbb{F}_2$, и пусть $g_1, \dots, g_n$ — его базис. Оператор умножения на g_i линеен; обозначим через M_i его матрицу в этом базисе.

Для любого непустого $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ элемент $\sum_{i \in I} g_i$ отличен от нуля, так как g_i линейно независимы. В поле умножение на ненулевой элемент обратимо, поэтому **матрица $\sum_{i \in I} M_i$ обратима над**

$\mathbb{F}_2$.

Осталось взять целочисленные матрицы B_i с $B_i \equiv M_i \pmod 2$. Тогда для любого непустого I

$$\det\Big(\sum_{i\in I} B_i\Big) \equiv \det\Big(\sum_{i\in I} M_i\Big) \equiv 1 \pmod 2,$$

то есть определитель суммы нечётен.

ОТВЕТ

Наибольшее возможное количество матриц равно n.

ЗАДАЧА 5 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И АСИМПТОТИКА

Пусть $y(x)$ и $z(x)$ — заданные в левой полуокрестности нуля и стремящиеся при $x \to -0$ к $+\infty$ решения соответственно уравнений

$$y^{(20)}(x) = y^{25}(x) \quad \text{и} \quad z^{20}(x) = z^{(25)}(x).$$

1. Вычислите значение предела
$$\lim_{x \to -0} \frac{\ln y(x)}{\ln z(x)}$$
для некоторых частных решений.
2. Найдите все возможные значения этого предела.

РЕШЕНИЕ

Частные решения. Степенные функции

$$y(x) = [P(-5/6)]^{1/24} \cdot (-x)^{-5/6},$$
$$z(x) = [-Q(-25/19)]^{1/19} \cdot (-x)^{-25/19},$$

где $P(a) = \prod_{k=0}^{19}(a-k)$, $Q(a) = \prod_{k=0}^{24}(a-k)$, являются решениями. Для них $\ln y \sim -\frac{5}{6}\ln|x|$, $\ln z \sim -\frac{25}{19}\ln|x|$, и предел равен $\frac{5}{6} \cdot \frac{19}{25} = \frac{19}{30}$.

Покажем, что **этот предел одинаков для всех решений**. Рассуждения проведём для y; для z они аналогичны.

1. Знаки производных. В силу уравнений к $+\infty$ при $x \to -0$ стремятся не только сами решения y и z, но и их производные до порядков 20 и 25 соответственно. Будем считать, что в рассматриваемой полуокрестности все они положительны.

2. Инвариантность относительно растяжений. При любых $A > 0$ и B функция $\tilde{y}(x) = A^{\alpha} y(Ax + B)$, где $\alpha = 20/(25-1) = 5/6$, также является решением уравнения $y^{(20)} = y^{25}$. Аналогично $\tilde{z}(x) = A^{\beta} z(Ax + B)$, где $\beta = 25/(20-1)$, — решение уравнения $z^{20} = z^{(25)}$.

3. Нормированный набор производных. Для каждого x рассмотрим набор

$$Y(x) = \left(y(x)^{1/\alpha},\ y'(x)^{1/(\alpha+1)},\ \ldots,\ y^{(19)}(x)^{1/(\alpha+19)}\right).$$

Для решений, связанных растяжением из п. 2, такие наборы пропорциональны:

$$\tilde{Y}(x)_j = \left(\tilde{y}^{(j)}(x)\right)^{1/(\alpha+j)} = \left(A^{\alpha+j} y^{(j)}(Ax + B)\right)^{1/(\alpha+j)} = A\, Y(Ax + B)_j.$$

Поэтому после нормировки (умножения на множитель, делающий сумму квадратов равной 1) **эти наборы задают на единичной сфере в $\mathbb{R}^{20}$ одну и ту же точку**.

По компактности сферы у нормированного $Y(x)$ есть предельная точка s_* при $x \to -0$: для некоторой возрастающей последовательности $x_q \to 0$ соответствующие точки s_q сходятся к s_*.

4. Все координаты s_* положительны. Координаты $s_{*,j}$ неотрицательны. Предположим, что среди них есть нулевые (но, конечно, не все). Тогда либо найдётся $j \in \{0, \ldots, 18\}$ с $s_{*,j} = 0$, $s_{*,j+1} > 0$, либо $s_{*,19} = 0$, $s_{*,0} > 0$.

Рассмотрим решения y_q, у которых набор $Y_q(0)$ сразу (без нормировки) совпадает с s_q, и решение y_* с $Y_*(0) = s_*$. По п. 2 каждое y_q получается из y растяжением.

Так как $y_*^{(j)}(0) = 0$ и $y_*^{(j+1)}(0) > 0$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем $y_*^{(j)}(-\varepsilon) < 0$. Из сходимости $s_q \to s_*$ следует, что $y_q^{(j)}(-\varepsilon) < 0$ при всех больших q. Значит, сколь угодно близко к

нулю у y найдутся точки, где отрицательна одна из производных порядка от 0 до 19, — противоречие с п. 1.

Случай $s_{*,19} = 0$, $s_{*,0} > 0$ разбирается так же, поскольку тогда $y_*^{(19)}(0) = 0$ и $y_*^{(20)}(0) = y_*(0)^{25} > 0$.

5. Двусторонние оценки. Из п. 4 следует, что нижний предел каждой координаты нормированного набора при $x \to -0$ положителен. Поэтому отношения координат ненормированного набора ограничены сверху и снизу; в частности, в некоторой полуокрестности нуля

$$C_1 < y'(x)^{1/(\alpha+1)} y(x)^{-1/\alpha} < C_2$$

с положительными постоянными C_1, C_2. Это равносильно оценке

$$-\frac{C_2^{\alpha+1}}{\alpha} < \left(y^{-1/\alpha}\right)'(x) < -\frac{C_1^{\alpha+1}}{\alpha}.$$

6. Асимптотика. Интегрируя от x до 0 и учитывая $y^{-1/\alpha} \to 0$, получаем $y^{-1/\alpha} \asymp |x|$, то есть $\ln y = -\alpha \ln |x| + O(1)$. Аналогично $\ln z = -\beta \ln |x| + O(1)$. Отсюда

$$\lim_{x \to -0} \frac{\ln y(x)}{\ln z(x)} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{20 \cdot 19}{24 \cdot 25} = \frac{19}{30}.$$

ОТВЕТ

В обоих пунктах предел равен $\dfrac{19}{30}$; других значений нет.

ЗАДАЧА 6 КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть дана непрерывная функция $f\colon (0,+\infty)^2 \to (0,+\infty)$. Для произвольных $a, b > 0$ определим координаты центра масс прямоугольника $(0,a)\times(0,b)$ с плотностью $f(x,y)$:

$$g_x(a,b) = \frac{\int_0^a \int_0^b x f(x,y)\,dy\,dx}{\int_0^a \int_0^b f(x,y)\,dy\,dx},$$

$$g_y(a,b) = \frac{\int_0^a \int_0^b y f(x,y)\,dy\,dx}{\int_0^a \int_0^b f(x,y)\,dy\,dx}.$$

Пусть $p > 0, q > 0$ — некоторые фиксированные константы.

1. Найдите функцию $f(x,y)$ в случае, когда

$$g_x(a,b) = \frac{a}{p+1}, \quad g_y(a,b) = \frac{b}{q+1}.$$

2. Пусть для непрерывных положительных функций $h(b)$ и $k(a)$ координаты центра масс имеют вид:

$$g_x(a,b) = \frac{a}{p+1}\cdot h(b), \quad g_y(a,b) = \frac{b}{q+1}\cdot k(a).$$

Найдите необходимые и достаточные условия на $h(b)$ и $k(a)$, при которых существует такая непрерывная положительная функция $f(x,y)$, и укажите её.

РЕШЕНИЕ

Решим сначала второй пункт: первый — его частный случай.

Уравнения на I. Положим

$$I(a,b)=\int_0^a\int_0^b f(x,y)\,dy\,dx.$$

Условия задачи означают, что

$$\int_0^a\int_0^b xf(x,y)\,dy\,dx=\frac{a\,h(b)}{p+1}\,I(a,b),$$
$$\int_0^a\int_0^b yf(x,y)\,dy\,dx=\frac{b\,k(a)}{q+1}\,I(a,b).$$

Дифференцируя первое равенство по a, а второе по b, получаем

$$a\frac{\partial I}{\partial a}=\frac{h(b)}{p+1}I+\frac{a\,h(b)}{p+1}\frac{\partial I}{\partial a},$$
$$b\frac{\partial I}{\partial b}=\frac{k(a)}{q+1}I+\frac{b\,k(a)}{q+1}\frac{\partial I}{\partial b},$$

откуда

$$\frac{\partial I}{\partial a}=\frac{h(b)}{a(p+1-h(b))}\,I,$$
$$\frac{\partial I}{\partial b}=\frac{k(a)}{b(q+1-k(a))}\,I.$$

Условие совместности. Смешанные производные I должны совпадать. Дифференцируя первое уравнение по b, а второе по a и используя сами уравнения, получаем

$$\frac{\partial^2 I}{\partial a\,\partial b}=\frac{1}{a}\Big(\frac{(p+1)\,h'(b)}{(p+1-h(b))^2}+\frac{h(b)}{p+1-h(b)}\cdot\frac{k(a)}{b(q+1-k(a))}\Big)I,$$
$$\frac{\partial^2 I}{\partial b\,\partial a}=\frac{1}{b}\Big(\frac{(q+1)\,k'(a)}{(q+1-k(a))^2}+\frac{k(a)}{q+1-k(a)}\cdot\frac{h(b)}{a(p+1-h(b))}\Big)I.$$

Вторые слагаемые в скобках совпадают. Приравнивая и умножая на ab, получаем

$$b\cdot\frac{(p+1)\,h'(b)}{(p+1-h(b))^2}=a\cdot\frac{(q+1)\,k'(a)}{(q+1-k(a))^2}.$$

Левая часть зависит только от b, правая — только от a, поэтому **обе части равны одной константе λ**.

Почему $\lambda = 0$. Из уравнения для h имеем

$$\frac{h'(b)}{(p+1-h(b))^2} = \frac{\lambda}{(p+1)\,b}.$$

Интегрируя (левая часть — производная от $\frac{1}{p+1-h(b)}$), получаем

$$\frac{1}{p+1-h(b)} = \frac{\lambda}{p+1}\ln b + C_1, \qquad h(b) = p+1-\frac{1}{\frac{\lambda}{p+1}\ln b + C_1}.$$

При $\lambda \neq 0$ знаменатель $\frac{\lambda}{p+1}\ln b + C_1$ строго монотонен и пробегает все $\mathbb{R}$, поэтому обращается в нуль в некоторой точке $b_0 > 0$. В этой точке $|h(b)| \to +\infty$, что противоречит непрерывности h на $(0, +\infty)$.

Значит, **$\lambda = 0$, и $h(b) \equiv h$, $k(a) \equiv k$ — постоянные**. Условия $0 < h < p+1$ и $0 < k < q+1$ следуют из положительности знаменателей и сходимости соответствующих интегралов.

Нахождение f. При постоянных h и k уравнения принимают вид

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{h}{p+1-h}\cdot\frac{I}{a}, \qquad \frac{\partial I}{\partial b} = \frac{k}{q+1-k}\cdot\frac{I}{b}.$$

Из первого $I(a,b) = C(b)\,a^{\frac{h}{p+1-h}}$. Подставляя во второе, получаем $C'(b) = \frac{k}{q+1-k}\cdot\frac{C(b)}{b}$, то есть $C(b) = A\,b^{\frac{k}{q+1-k}}$. Итак,

$$I(a,b) = A\,a^{\frac{h}{p+1-h}}\,b^{\frac{k}{q+1-k}}, \qquad A > 0,$$

и

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 I}{\partial a\,\partial b}\bigg|_{\substack{a=x\\b=y}} = A\cdot\frac{h}{p+1-h}\cdot\frac{k}{q+1-k}\cdot x^{\frac{h}{p+1-h}-1}\,y^{\frac{k}{q+1-k}-1}.$$

Переобозначив постоянную, получаем

$$f(x,y) = A\,x^{\frac{h}{p+1-h}-1}y^{\frac{k}{q+1-k}-1}.$$

Первый пункт. Условие $g_x = \frac{a}{p+1}$, $g_y = \frac{b}{q+1}$ соответствует $h \equiv 1$, $k \equiv 1$. Подставляя в общую формулу:

$$f(x,y) = A\, x^{\frac{1}{p}-1}\, y^{\frac{1}{q}-1}.$$

ОТВЕТ

1. $f(x,y) = Ax^{\frac{1}{p}-1}y^{\frac{1}{q}-1}$, где $A > 0$.
2. Необходимо и достаточно, чтобы $h(b) \equiv h$ и $k(a) \equiv k$ были постоянными, причём $0 < h < p+1$, $0 < k < q+1$. Тогда

$$f(x,y) = Ax^{\frac{h}{p+1-h}-1}y^{\frac{k}{q+1-k}-1},$$

где $A > 0$ — произвольная постоянная.

Заметки

Заметки

Заметки

RUDNMATH OLYMP

МЕЖДУНАРОДНАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

math-olymp.rudn.ru

Наведите камеру, чтобы открыть сайт олимпиады

RUDN university