RUDN university

RUDNMATH OLYMP

МЕЖДУНАРОДНАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Математический бой
Финал

Решения ▪ 2025

РЕШАЙ ▪ ПОБЕЖДАЙ ▪ ПОКОРЯЙ МИР!

Содержание

1 **Задача 1** — Рекуррентность — 3

2 **Задача 2** — Функциональное уравнение — 5

3 **Задача 3** — 6,28... — 7

4 **Задача 4** — До десятых — 9

5 **Задача 5** — Тетраэдр — 11

В брошюре собраны полные решения пяти задач математического боя (финал) олимпиады **RUDNMATH OLYMP 2025** — международной студенческой математической олимпиады РУДН. Условие каждой задачи выделено цветной рамкой, после неё следует подробное решение.

ЗАДАЧА 1 РЕКУРРЕНТНОСТЬ

Опишите все упорядоченные четвёрки действительных чисел a, b, c, d, для которых дробно-линейное рекуррентное преобразование

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$$

является периодическим для всех $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{-d/c\}$. Как определить длину периода за число шагов, не зависящее от a, b, c, d? В каком случае период равен двум, т. е. $x_{n+2} \equiv x_n$?

РЕШЕНИЕ

Критерий периодичности. Отображение $x \mapsto f^{\circ N}(x)$ (N раз) имеет матрицу A^N. Поэтому **преобразование периодично с периодом N тогда и только тогда, когда $A^N = \mu E$, $\mu \neq 0$.**

Покажем, что это так ровно в том случае, когда A диагонализуема и её собственные значения α, β ненулевые, причём $\zeta = \alpha/\beta$ — (комплексный) корень из единицы.

Любую матрицу 2×2 можно записать в виде $A = CJC^{-1}$, где J — либо жорданова клетка, либо диагональная матрица. Для жордановой клетки равенство $J^N = \mu E$ невозможно. Если J диагональна с одним двукратным собственным значением $\alpha \neq 0$, то f — тождественное преобразование, и утверждение верно.

Пусть собственные значения различны. Оба они ненулевые, иначе ранг A^N меньше 2. Для $J = \operatorname{diag}\{\alpha, \beta\}$ равенство $J^N = \mu E$ означает $\alpha^N = \beta^N = \mu$, то есть $(\alpha/\beta)^N = 1$.

Условие через коэффициенты. Имеем $\operatorname{tr} A = a + d = \alpha + \beta$ и $\Delta = \det A = ad - bc = \alpha\beta \neq 0$. Отсюда

$$\zeta + \frac{1}{\zeta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{(a+d)^2}{ad-bc} - 2.$$

С другой стороны, ζ — корень из единицы степени N, поэтому

$\zeta = e^{2\pi i\theta}$, где $\theta = L/N \in \mathbb{Q}$ — несократимая дробь, и

$$\zeta + \frac{1}{\zeta} = e^{2\pi i\theta} + e^{-2\pi i\theta} = 2\cos 2\pi\theta.$$

Сравнивая, получаем

$$\frac{(a+d)^2}{ad-bc} = 2 + 2\cos 2\pi\theta = 4\cos^2 \pi\theta, \qquad \theta \in \mathbb{Q}.$$

Ответ на вопросы задачи. Вместе с условием $ad - bc \neq 0$ это равенство описывает все искомые четвёрки a, b, c, d. **Период равен знаменателю несократимой дроби** θ, и его можно найти по значению $\frac{(a+d)^2}{ad-bc}$ за фиксированное число действий.

В частности, $T = 2$ при $\theta = k/2$ с нечётным k. Тогда $\cos \pi\theta = 0$, то есть **период равен двум при** $a + d = 0$.

ЗАДАЧА 2 ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Существует ли решение функционального уравнения

$$xy = M(x,y)\,x^2y^2 + N(x,y), \qquad x,y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

в классе функций $M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

1. ограниченных и непрерывных в $\mathbb{R}^2$;
2. ограниченных и равномерно непрерывных в $\mathbb{R}^2$?

РЕШЕНИЕ

1. Существует. Будем искать решение уравнения (1) в виде $M(x,y) = \varphi(xy)$, $N(x,y) = \psi(xy)$, то есть среди функций, постоянных на «линиях уровня» — гиперболах $xy = \text{const}$. Замена $xy = t$ приводит к уравнению

$$t = \varphi(t)\,t^2 + \psi(t). \tag{2}$$

Пример его решения строится легко:

$$\varphi(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{t}, & |t| \geq 1, \\ t, & t \in [-1,1]; \end{cases} \qquad \psi(t) := \begin{cases} 0, & |t| \geq 1, \\ t - t^3, & t \in [-1,1]. \end{cases}$$

Обе функции ограничены и непрерывны, поэтому M и N ограничены и непрерывны в $\mathbb{R}^2$.

2. Не существует. Предположим противное. Полагая $y = 0$ в (1), получаем $N(x,0) \equiv 0$. В силу равномерной непрерывности N отсюда следует, что

$$\lim_{x\to\infty} N\Big(x, \frac{t}{x}\Big) = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Пределы здесь берутся вдоль ветвей гипербол $xy = t$, которые при $x \to \infty$ асимптотически приближаются к прямой $y = 0$.

Далее, полагая $y = t/x$ в (1), получаем

$$t = M\left(x, \frac{t}{x}\right) t^2 + N\left(x, \frac{t}{x}\right).$$

Переходя к пределу при $x \to \infty$ и учитывая (3), находим

$$\lim_{x\to\infty} M\left(x, \frac{t}{x}\right) = \frac{1}{t} \tag{4}$$

при каждом фиксированном $t \neq 0$.

Но **ветви гипербол $xy = t$ неограниченно сближаются при $x \to \infty$**, поэтому для равномерно непрерывной M пределы (4) вдоль всех ветвей должны совпадать. Они же равны $1/t$ и различны — противоречие.

ЗАДАЧА 3

6,28...

При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t-\tau) = f(t)$$

имеет единственное 2π-периодическое решение для любой 2π-периодической $f \in L_{2,loc}(\mathbb{R})$?

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a\,x(t-\tau) = f(t),$$

где f — 2π-периодическая функция из $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R})$, а $a, \tau \in \mathbb{R}$ — параметры.

Переход к коэффициентам Фурье. Разложим f и искомое решение в ряды Фурье:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{int}, \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{int}.$$

Тогда

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inx_n e^{int}, \qquad x(t-\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-in\tau} e^{int}.$$

Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, для каждого $n \in \mathbb{Z}$ получаем

$$(in + a\,e^{-in\tau})\,x_n = f_n. \tag{1}$$

Критерий. Решение существует и единственно для любой f тогда и только тогда, когда $in + a\,e^{-in\tau} \neq 0$ **при всех** $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае

$$x_n = \frac{f_n}{in + a\,e^{-in\tau}}.$$

Выясним, когда это условие нарушается.

Случай $n = 0$. Уравнение (1) принимает вид $a\,x_0 = f_0$. Если $a = 0$, то при $f_0 \neq 0$ решения нет, а при $f_0 = 0$ значение x_0 произвольно. Поэтому необходимо $a \neq 0$.

Случай $n \neq 0$. Множитель обращается в нуль, если

$$in + a\,e^{-in\tau} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -ine^{in\tau} = n\sin n\tau - in\cos n\tau.$$

Так как a вещественно, мнимая часть равна нулю: $\cos n\tau = 0$. Тогда $\sin n\tau = \pm 1$ и $a = n\sin n\tau = \pm n$.

Итак, для $n \neq 0$ единственность нарушается ровно тогда, когда $\cos n\tau = 0$ **и** $a = n\sin n\tau$.

ОТВЕТ

Единственное 2π-периодическое решение существует для любой f тогда и только тогда, когда $a \neq 0$ и ни при каком $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ не выполняются одновременно равенства $\cos n\tau = 0$ и $a = n\sin n\tau$.

ЗАДАЧА 4 ДО ДЕСЯТЫХ

Пусть y — решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = |\sin(\pi y)| \cdot \cos(\pi y), \\ y(0) = 202{,}6. \end{cases}$$

Найдите с точностью до десятых $y(202{,}6)$.

РЕШЕНИЕ

Где лежит решение. Функции $y \equiv n/2$, $n \in \mathbb{Z}$, являются решениями уравнения. **Любое другое решение монотонно, определено на всей прямой, а его график лежит в полосе высотой $1/2$ между графиками двух постоянных решений.**

Так как $\cos(202{,}6\pi) = \cos(0{,}6\pi) < 0$, рассматриваемое решение убывает и остаётся в промежутке $(202{,}5;\ 202{,}6]$. Поэтому возможные ответы — $202{,}6$ или $202{,}5$.

Оценка скорости. Пока $202{,}55 \le y \le 202{,}6$, имеем $\sin \pi y > 0$, и

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2\pi y \le -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{10} \le -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}.$$

При этом

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{2-\sqrt{3}} > \frac{1}{4}\sqrt{2-1{,}74} > \frac{1}{8},$$

поэтому $y' < -\frac{1}{8}$.

Вывод. При такой скорости убывания решение станет меньше $202{,}55$ не позже, чем при $x = 8 \cdot 0{,}05 = 0{,}4$. Дальше оно продолжает убывать и не может опуститься ниже $202{,}5$. Значит, $y(202{,}6) \in (202{,}5;\ 202{,}55)$.

ОТВЕТ

$y(202{,}6) \approx 202{,}5.$

ЗАДАЧА 5 ТЕТРАЭДР

Пусть $P_0P_1P_2P_3$ — произвольный тетраэдр. Докажите, что для тетраэдра $P_0P_1P_2P_3$ существует зависящее от двух параметров семейство деформаций (под деформациями данного тетраэдра подразумевается непрерывное движение его вершин), сохраняющих площади граней, но изменяющих объём.

РЕШЕНИЕ

Система координат. Направим ось Ox вдоль ребра P_0P_1, начало координат O поместим в середину этого ребра. Ось Oz направим по прямой, проходящей через O и являющейся пересечением двух плоскостей: перпендикулярной прямой P_0P_1 и перпендикулярной прямой P_2P_3. Ось Oy дополняет систему до правой тройки.

Тогда вершины тетраэдра имеют координаты

$$P_0(-a,0,0), \quad P_1(a,0,0), \quad P_2(x_2,y_2,h), \quad P_3(x_3,y_3,h), \quad a,h>0.$$

Площади граней. Обозначим через S_{ijk} площадь грани $P_iP_jP_k$. С помощью векторного произведения получаем

$$\begin{cases} S_{012}^2 = a^2(y_2^2+h^2), \\ S_{013}^2 = a^2(y_3^2+h^2), \\ 4S_{023}^2 = h^2((y_2-y_3)^2+(x_2-x_3)^2)+(x_2y_3-x_3y_2-a(y_2-y_3))^2, \\ 4S_{123}^2 = h^2((y_2-y_3)^2+(x_2-x_3)^2)+(x_2y_3-x_3y_2+a(y_2-y_3))^2. \end{cases} \tag{1}$$

Параметры деформации. Введём **два параметра деформации**:

$$X = x_2y_3 - x_3y_2, \qquad Y = y_2 - y_3.$$

Тогда система (1) перепишется в виде

$$\begin{cases} S_{012}^2 = a^2((Y+y_3)^2+h^2), \\ S_{013}^2 = a^2((y_2-Y)^2+h^2), \\ 4S_{023}^2 = h^2(Y^2+(x_2-x_3)^2)+(X-aY)^2, \\ 4S_{123}^2 = h^2(Y^2+(x_2-x_3)^2)+(X+aY)^2. \end{cases} \tag{2}$$

Объём выражается через смешанное произведение:

$$V = \frac{ah}{3}|Y|. \tag{3}$$

Выражение через площади. Вычитая из третьего уравнения системы (1) четвёртое, получаем

$$a = \frac{S_{123}^2 - S_{023}^2}{XY}. \tag{4}$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим

$$y_2 + y_3 = \frac{S_{012}^2 - S_{013}^2}{(S_{123}^2 - S_{023}^2)^2}\,X^2Y.$$

Вместе с $y_2 - y_3 = Y$ это определяет y_2. Из первого уравнения находим h^2:

$$h^2 = \frac{S_{012}^2}{a^2} - y_2^2 = Y^2\left(\frac{S_{012}^2X^2}{(S_{123}^2-S_{023}^2)^2} - \frac{1}{4}\left(1+\frac{S_{012}^2-S_{013}^2}{(S_{123}^2-S_{023}^2)^2}\,X^2\right)^2\right). \tag{5}$$

Объём. Подставляя (4) и (5) в (3), получаем

$$V = \frac{1}{3}\left|\frac{S_{123}^2-S_{023}^2}{X}\right| |Y| \cdot \sqrt{\frac{S_{012}^2X^2}{(S_{123}^2-S_{023}^2)^2} - \frac{1}{4}\left(1+\frac{S_{012}^2-S_{013}^2}{(S_{123}^2-S_{023}^2)^2}\,X^2\right)^2}. \tag{6}$$

Таким образом, **при фиксированных площадях граней объём зависит от двух параметров X и Y и меняется при деформации**, что и требовалось.

Заметки

Заметки

RUDNMATH OLYMP

МЕЖДУНАРОДНАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

math-olymp.rudn.ru

Наведите камеру, чтобы открыть сайт олимпиады

RUDN university