RUDN university

RUDNMATH OLYMP

МЕЖДУНАРОДНАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Математический бой
Полуфинал

Решения ▪ 2025

РЕШАЙ ▪ ПОБЕЖДАЙ ▪ ПОКОРЯЙ МИР!

Содержание

1 **Задача 1** — Остроугольный тетраэдр — 3

2 **Задача 2** — Композиция — 5

3 **Задача 3** — Верхний предел — 7

4 **Задача 4** — Почти проектор — 9

5 **Задача 5** — Делимая последовательность — 11

В брошюре собраны полные решения пяти задач математического боя (полуфинал) олимпиады **RUDNMATH OLYMP 2025** — международной студенческой математической олимпиады РУДН. Условие каждой задачи выделено цветной рамкой, после неё следует подробное решение.

ЗАДАЧА 1 ОСТРОУГОЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР

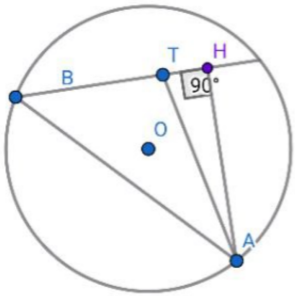
Назовём тетраэдр остроугольным, если центр его описанной сферы лежит внутри. Верно ли, что:

а) высоты остроугольного тетраэдра падают внутрь граней;

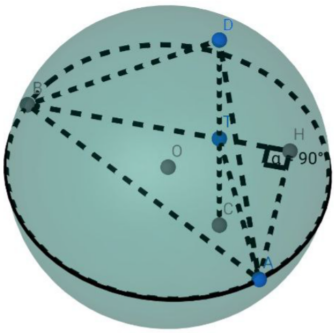
б) если все высоты падают внутрь, то тетраэдр остроугольный?

РЕШЕНИЕ

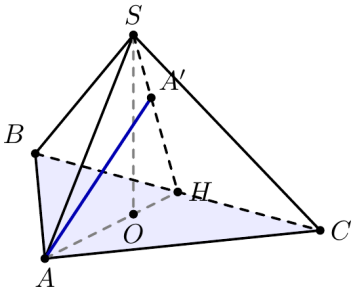
а) Нет. Рассмотрим конструкцию



Существует тетраэдр $ABCD$, симметричный относительно плоскости α, где T — проекция точек C и D. Для такого тетраэдра **центр O описанной сферы лежит внутри, а основание высоты H — вне грани BCD.**



б) Нет. Рассмотрим правильную пирамиду $SABC$, у которой центр O описанной сферы лежит на грани ABC. Такой тетраэдр не остроугольный.



Высота из S падает в точку O, то есть внутрь грани ABC. Высота из A падает на высоту треугольника SBC, проведённую из S. Пусть H — основание этой высоты; рассмотрим треугольник SAH.

Этот треугольник остроугольный, поэтому его высота AA' падает на отрезок SH, и при этом AA' — высота тетраэдра $SABC$. Значит, A' лежит внутри грани SBC. Аналогично для вершин B и C.

Итак, $SABC$ — **не остроугольный тетраэдр, все высоты которого падают внутрь граней**.

ЗАДАЧА 2 КОМПОЗИЦИЯ

Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ удовлетворяет уравнению

$$f(f(x)) = x^2 - x + \frac{3}{4} \quad \left(x \neq \frac{1}{2}\right).$$

Найдите $f(-\frac{1}{2})$.

РЕШЕНИЕ

Заметим, что

$$f\Big(f\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big) = \frac{3}{2} = f\Big(f\Big(\frac{3}{2}\Big)\Big).$$

Обозначим $y = f(-1/2)$, $z = f(3/2)$; тогда $f(y) = f(z) = 3/2$.

Квадратные уравнения. Применим f к этому равенству:

$$f(f(y)) = f\Big(\frac{3}{2}\Big) = f(f(z)), \quad \text{то есть} \quad y^2 - y + \frac{3}{4} = z = z^2 - z + \frac{3}{4}.$$

Из уравнения $z = z^2 - z + \frac{3}{4}$ получаем $z = 3/2$: другой корень, $1/2$, не подходит по условию.

Выбор корня. Теперь $y^2 - y + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$, откуда $y = 3/2$ или $y = -1/2$. Значение $y = -1/2$ приводит к противоречию: тогда

$$f\Big(f\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big) = f\Big(-\frac{1}{2}\Big) = -\frac{1}{2}, \quad \text{но} \quad f\Big(f\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

Остаётся $f(-1/2) = 3/2$.

Пример. Функция

$$f(x) = \frac{1}{\left|x - \frac{1}{2}\right|^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2}$$

удовлетворяет условию задачи, так что такие функции действительно существуют.

ОТВЕТ

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

ЗАДАЧА 3 ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛ

Пусть $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k < +\infty.$$

Справедливо ли, что всегда выполняется

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}} \left(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{k}\right) \cdot \left(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{b_k}{k}\right) \cdot N = 0?$$

РЕШЕНИЕ

Построение. Пусть I — множество чётных, а J — множество нечётных натуральных чисел. Положим

$$a_k = \begin{cases} k^{-1/2}, & k \in I, \\ 0, & k \notin I, \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} k^{-1/2}, & k \in J, \\ 0, & k \notin J. \end{cases}$$

Условия выполнены. Ряды сходятся:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^{3/2}} < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^{3/2}} < \infty.$$

Так как $I \cap J = \emptyset$, то $a_k b_k = 0$ **при всех** k, и $\sum a_k b_k = 0$.

Оценка хвостов. Пусть $N = 2M$. Сравнивая суммы с интегралами от убывающих функций, получаем

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{k} = \sum_{m=M}^{\infty} \frac{1}{(2m)^{3/2}} \geq \int_{M}^{\infty} \frac{dx}{(2x)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2M}} = \frac{1}{\sqrt{N}},$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{b_k}{k} = \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^{3/2}} \geq \int_{M+1}^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2M+1}} = \frac{1}{\sqrt{N+1}}.$$

Поэтому **оба хвоста имеют порядок не меньше** $1/\sqrt{N}$.

Вывод. При $N = 2M$

$$\Big(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{k}\Big)\Big(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{b_k}{k}\Big) \cdot N \geq \frac{N}{\sqrt{N(N+1)}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/N}} \to 1.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{N\to\infty} \Big(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{k}\Big)\Big(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{b_k}{k}\Big) \cdot N \geq 1 > 0.$$

ОТВЕТ

Нет, не всегда.

ЗАДАЧА 4 ПОЧТИ ПРОЕКТОР

Пусть $P(t)$ — непрерывная функция от $t \in [0;1]$ со значениями в квадратных $n \times n$-матрицах $P(t) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Пусть также $P^m(t) = P(t)\ \forall t \in [0;1]$. При каких целых m ранг матрицы не зависит от t?

РЕШЕНИЕ

Разберём несколько случаев.

$m < 0$. Чтобы степень P^m имела смысл, каждая матрица семейства должна быть обратимой. Значит, $\operatorname{rk} P(t) \equiv n$.

$m = 0$. Условие $P(t) = P^0(t) = E$ сразу даёт $\operatorname{rk} P(t) \equiv n$.

$m = 1$. Условие $P^1 = P$ выполнено всегда, и ранг может меняться. Например, $P(t) = tE$: $\operatorname{rk} P(1) = n$, но $\operatorname{rk} P(0) = 0$. **Этот случай не подходит.**

$m = 2$. Матрицы $P(t)$ — проекторы, их собственные значения равны 0 или 1. Поэтому

$$\operatorname{rk} P(t) = \operatorname{tr} P(t).$$

Функция $t \mapsto \operatorname{tr} P(t)$ непрерывна на $[0;1]$ и принимает только целые значения от 0 до n. **В силу связности отрезка она постоянна**.

$m > 2$. Из тождества $P^m = P$ следует, что собственными значениями $P(t)$ могут быть только 0 и корни степени $m-1$ из единицы. Кроме того, такие матрицы диагонализуемы: для жордановой клетки размера больше 1 равенство $J^m = J$ не выполняется.

Рассмотрим $A(t) = P^{m-1}(t)$. Это **проектор**:

$$A^2(t) = P^{2m-2}(t) = P^m(t)\,P^{m-2}(t) = P(t)\,P^{m-2}(t) = P^{m-1}(t) = A(t).$$

По предыдущему случаю $\operatorname{rk} A(t) \equiv \text{const}$. Поскольку $P(t)$ диагонализуема, число её ненулевых собственных значений (с учётом крат-

ности) такое же, как у $A(t)$. Следовательно,

$$\operatorname{rk} P(t) = \operatorname{rk} A(t) \equiv \text{const}.$$

ОТВЕТ

При всех целых $m \neq 1$.

ЗАДАЧА 5 ДЕЛИМАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Пусть a, b, c — три целых числа, причём b нечётное. Определим последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0}$ условиями: $x_0 = 4$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2c$, $x_3 = 3b$ и для всех натуральных n выполняется

$$x_{n+3} = ax_{n-1} + bx_n + cx_{n+1}.$$

Докажите, что для всех натуральных m и для всех простых p число x_{p^m} делится на p.

РЕШЕНИЕ

След степеней. Рассмотрим сопутствующую матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её характеристический многочлен $\lambda^4 - c\lambda^2 - b\lambda - a$ соответствует данному рекуррентному соотношению, а следы $\operatorname{tr} C^n$ при $n = 0, 1, 2, 3$ равны 4, 0, $2c$, $3b$. По теореме Гамильтона–Кэли последовательность $\operatorname{tr} C^n$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и x_n, а начальные значения совпадают. Поэтому $x_n = \operatorname{tr} C^n$ **при всех** n.

Малая теорема Ферма для следа. Для любой целочисленной матрицы M и простого p верно

$$\operatorname{tr}(M^p) \equiv \operatorname{tr} M \pmod{p}.$$

Применяя это m раз к матрицам $C^{p^{m-1}}, \ldots, C$, получаем

$$x_{p^m} = \operatorname{tr} C^{p^m} \equiv \operatorname{tr} C^{p^{m-1}} \equiv \cdots \equiv \operatorname{tr} C = x_1 = 0 \pmod{p}.$$

Значит, x_{p^m} **делится на** p при всех натуральных m и простых p.

RUDNMATH OLYMP

МЕЖДУНАРОДНАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

math-olymp.rudn.ru

Наведите камеру, чтобы открыть сайт олимпиады

RUDN university